Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Enero-Abril 2009

Nombre: ______________________

Carnet: ______________ Sección: ______

MA-3111-1:30 p.m.—Segundo Parcial, 2009, 40 %—B

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

TABLA DE TRANSFORMADAS DE FOURIER; $a \in \mathbb{R}$, $c > 0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$
La expresión $1_{(-c,c)}(x)$ indica la función que vale 1 para $-c < x < c$ y 0 en otro caso.

$f(x)$	$\hat{f}(\omega)$
$f(x-a)$	$e^{-ia\omega}\hat{f}(\omega)$
$e^{iax}f(x)$	$\hat{f}(\omega - a)$
$f(ax)$	$(1/\lvert a\rvert)\hat{f}(\omega/a)$
$f^{(n)}_{gen}(x)$	$(i\omega)^n\hat{f}(\omega)$
$x^n f(x)$	$i^n \hat{f}^{(n)}_{gen}(\omega)$
$e^{-cx^2/2}$	$(1/\sqrt{2\pi c})e^{-\omega^2/2c}$

$1/(c^2+x^2)$	$(1/2c)e^{-c\lvert\omega\rvert}$
$e^{-c\lvert x\rvert}$	$c/[\pi(c^2+\omega^2)]$
$(\operatorname{sen} cx)/x$	$(1/2)1_{(-c,c)}(\omega)$
$1_{(-c,c)}(x)$	$(\operatorname{sen} c\omega)/\pi\omega$
1	$\delta(\omega)$
$\delta(x)$	$1/2\pi$
$f(x)g(x)$	$\hat{f} * \hat{g}(\omega)$

$\hat{f}(\omega) = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$
$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega$
$\mathcal{F}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha\hat{f}(\omega) + \beta\hat{g}(\omega)$
$(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$
$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}\,d\omega$

$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$, $\qquad 2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$

$\int_0^1 x\cos(ax)dx = \frac{a\sin(a)+\cos(a)-1}{a^2}$, $\qquad \int_0^1 x\sin(ax)dx = \frac{\sin(a)-a\cos(a)}{a^2}$

---

1. (7 puntos) Calcula la transformada de Fourier coseno de $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2}\left(H(w+1) - H(w-1)\right)}$$

Solución
Aplicamos la definición:

$$\hat{f}(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x\cos(wx)}{x}dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}((w+1)x)}{x}dx - \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}((w-1)x)}{x}dx\right) =$$
$$\frac{\operatorname{sign}(w+1) - \operatorname{sign}(w-1)}{2} = \frac{1}{2}\left(H(w+1) - H(w-1)\right)$$

Es decir es una función que vale $\frac{1}{2}$ si $-1 \le x \le 1$ y cero en el resto.

MA-3111-1:30 p.m.-B

2. (13 ptos.) Halle $u(x,t)$ acotada tal que

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 & \\ u(x,0) = x - 1 & \end{cases}$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{-1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\cos((2k+1)\pi x)e^{-(2k+1)^2\pi^2 t}}$$

Solución

Separamos variables como es normal, $u(x,t) = \phi(x)T(t)$

$$\phi''(x) = \lambda\phi(x), \qquad T'(t) = \lambda T(t) \Rightarrow T(t) = e^{-\lambda t}$$

La conciones de contorno me obligan a que $\lambda \leq 0$ llamemos $k^2 = -\lambda$. La primera condición impone $\phi(x) = \cos(kx)$ y la segunda $\phi'(1) = -k\,\text{sen}(k) = 0$ implica $k_n = n\pi$ donde $n = 1, 2...$ notemos que hay que agregar el caso $n = 0$, esto es una constante tambien satisface las condiciones de contorno. La solución más general es:

$$u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\pi x)e^{-n^2\pi^2 t}$$

Para hallar A_n imponemos la condición inicial:

$$x - 1 = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\pi x)$$

$$A_n = 2\int_0^1 (x-1)\cos(n\pi x)dx = 2\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2} - 2\left.\frac{\text{sen}(n\pi x)}{n\pi}\right|_0^1$$

$$A_{2k} = 0, \qquad A_{2k+1} = \frac{-4}{(2k+1)^2\pi^2}$$

$$A_0 = 2\int_0^1 (x-1)dx = 2\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -1$$

Luego la solución es:

$$u(x,t) = \frac{-1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\cos((2k+1)\pi x)e^{-(2k+1)^2\pi^2 t}$$

3. (13 ptos.) Halle $u(x,y)$ acotada para $y > 1$ tal que

$$\begin{cases} u_{xx} + 9u_{yy} = 0 & ;\ x \in \mathbb{R} \quad 0 < y < \infty \\ u(x,0) = \delta(x-2) \end{cases}$$

$$\boxed{u(x,y) = \frac{y}{3\pi((y/3)^2 + (x-2)^2)}}$$

Solución
Aqui necesitamos hacer una transformada de Fourier

$$\hat{u}(w,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,y)e^{-iwx}dx$$
$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(w,y)e^{iwx}dw$$

La ecuación para la transformada es:

$$-w^2\hat{u}(w,y) + 9\hat{u}_{yy}(w,y) = 0 \Rightarrow \hat{u}(w,y) = A(w)e^{-|w|y/3}$$

La solucón es así porque debe ser acotada y $y > 0$. La solución más general es, por lo tanto:

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} A(w)e^{-|w|y/3}e^{iwx}dw$$

Para hallar $A(w)$ imponemos la condición en $y = 0$

$$\delta(x-2) = \int_{-\infty}^{\infty} A(w)e^{iwx}dw \Rightarrow A(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-2)e^{-iwx}dx = \frac{1}{2\pi}e^{-i2w}$$

La solución final, es, por tanto:

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|w|y/2}e^{-i2w}e^{iwx}dw = \frac{y}{3\pi((y/3)^2 + (x-2)^2)}$$

Para la última integral simplemente he usado las tablas.

4. (7 ptos.) Calcule la integral

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{x + x^3}\, dx$$

$$\boxed{I(a) = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Solución

Para calcular la integral usamos la identidad de Plancharel con $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y $g(x) = \frac{\operatorname{sen}(ax)}{x}$

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1_{(-a,a)(w)}}{2} \frac{e^{-|w|}}{2} dw =$$
$$\frac{\pi}{2} \int_{-a}^{a} e^{-|w|} dw = \pi \int_{0}^{a} e^{-w} dw = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-a})$$